Von dieser Zeitschrift erscheinen jährlich 24 Nummern nebst 12 Nummern **Notizen- und Intelligenzblatt** des österr. Ingenieurvereins als Beilage. **Bestellungen** nehmen alle Buchhandlungen des In- und Auslandes an. Der halbe Jahrgang kostet 3 fl. CM., der ganze Jahrgang 6 fl. CM. Mit Postvers. im Inlande 6 fl. 36 kr.

Zeitschrift
des
österreichischen Ingenieur-Vereines.

III. Jahrgang.

Ankündigungen, welche dem Zwecke der Zeitschrift entsprechen, werden in das Beiblatt, **Notizen- u. Intelligenzblatt d. österr. Ingenieurvereins**" aufgenommen und portofrei erbeten. Einrückungsgebühr für die gebrochene Petitzeile für 1mal 4 kr., für 2mal 6 kr., für 3mal 8 kr. CM. **Adresse**: Tuchlauben Nr. 562.

№ 10. Wien, im Mai 1851.

Besondere Betrachtungen über symmetrisch gebildete Figuren, welche in vielen practischen Fällen vortheilhaft benützt werden können.

Mit Zeichnungen Fig. 1—8 auf Blatt 5.

Mitgetheilt von Georg Rebhann.

Einen nicht unwichtigen Zweig der Mechanik bildet die Lehre von den Trägheits-Momenten der Massen*). Obwohl es in dieser Beziehung nicht an umfangreichen Untersuchungen mangelt, so wurde demungeachtet Referent gelegenheitlich auf eine besondere Betrachtung der Trägheits-Momente symmetrisch gebildeter Ebenen geleitet, welche von den Fachmännern noch nicht angestellt worden ist. Es wird daher gestattet sein, die geehrten Leser dieser Zeitschrift mit den diesfälligen Untersuchungen bekannt zu machen, und dieß um so mehr, als die aus ihnen hervorgehenden Resultate in vielen practischen Fällen nutzbringende Anwendung finden können.

Diesen einbegleitenden Bemerkungen zu Folge soll daher vorläufig

I. die fragliche Eigenschaft gedachter Ebenen entwickelt,

sodann aber

II. die Nützlichkeit, welche die Kenntniß derselben mit sich bringt, besonders dargethan werden.

Ad I.

Es sei Fig. **1.** eine materielle Ebene von gleichmäßiger Dichte, welche durch eine gerade AB in zwei symmetrische Hälften, nämlich so getheilt werden kann, daß durch dieselbe jede darauf Senkrechte z. B. MN halbirt werde. Diese Linie AB, sowie jede andere, mit welcher allenfalls eine ähnliche Symmetrie erzielt werden könnte, pflegt man eine Axe der Figur zu nennen. Unter diesen Voraussetzungen wird der Schwerpunkt O der ganzen Figur in die Axe AB fallen müssen.

Es soll nun das Trägheits-Moment einer solchen materiellen Ebene für den Fall untersucht werden, wenn sie um eine beliebige Gerade EF als Drehungs-Axe bewegt wird, welche jedoch in der gegebenen Fläche liegt, und zugleich durch ihren Schwerpunkt geht.

Zu diesem Behufe nehme man den gedachten Schwerpunkt O als Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinaten-Systems an, bei welchem die positiven Abscissen auf der Axe der Figur von O gegen A gezählt werden, während die Ordinaten-Axe in die hierauf senkrechte Richtung CD fällt und bezeichne für einen willkührlichen Punkt M der Begränzungs-Curve die Abscisse OP mit x, die Doppel-Ordinate MN hingegen mit y. Zieht man in einer unendlich kleinen Entfernung $Pp = dx$ die nächste Doppel-Ordinate mn, so entsteht das Flächen-Element MNmn, welches offenbar als eine materielle Linie zu betrachten sein wird, deren unendlich kleine Masse dm durch den Ausdruck ydx repräsentirt werden kann, wenn — wie dieß in ähnlichen Fällen zu geschehen pflegt — der Flächenraum mit der Masse verwechselt wird.

Nennt man ferner φ den Winkel, welcher von der Axe der Figur und der Drehungsaxe eingeschlossen wird, und setzt man die Entfernung des Mittelpunktes P der Doppelordinate von letztgenannter Axe, nämlich $PG = z$, so wird das unendlich kleine Trägheits-Moment $d\mu$ des Flächen-Elements mit jenem übereinstimmen, das einer materiellen Geraden entspricht, bei welcher ihre Masse $= dm$, ihre Länge $= y$, die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Drehungs-Axe $= z$ und der Winkel, den sie mit dieser letzteren bildet, $= 90^0 - \varphi$ ist.

Nach bekannten Sätzen aus der Lehre vom Trägheits-Momente der Massen wird man daher die Gleichung

$$d\mu = \left(\frac{1}{12} \cos^2\varphi\, y^2 + z^2\right) dm$$

aufzustellen berechtigt sein.

Da nun $z = x \sin\varphi$ und $dm = y\,dx$ gesetzt werden kann, so findet man nach gehöriger Substitution auch

$$d\mu = \frac{1}{12} \cos^2 . \varphi\, y^3\, dx + \sin^2\varphi\, x^2\, y\, dx$$

als Ausdruck für das Trägheits-Moment des in Rede stehenden Flächen-Elements.

Um endlich das Trägheits-Moment μ der ganzen materiellen Fläche zu finden, wird man die Momente von sämmtlichen Elementen, aus welchen die betrachtete Ebene besteht, zu summiren, und sonach von dem aufgestellten Differential-Ausdrucke das Integrale zwischen den Gränzen $x = OA$ und $x = -OB$ zu nehmen haben. Setzt man daher $OA = a$ und $OB = b$, so erhält man sofort

$$\mu = \frac{1}{12} \cos^2\varphi \int_{-b}^{+a} y^3\, dx + \sin^2\varphi \int_{-b}^{+a} y^2\, y\, dx$$

Läßt man die Drehungs-Axe mit der Axe der Figur zusammenfallen, und bezeichnet man für diesen besonderen Fall den Werth des Trägheitsmomentes mit μ_1, so hat man wegen

$$\varphi = o \quad . \quad . \quad . \quad \mu_1 = \frac{1}{12} \int_{-b}^{+a} x^3\, dx.$$

Läßt man hingegen die Drehungs-Axe auf der Axe der Figur senkrecht stehen, und heißt man den dießfälligen Werth μ_2, so wird wegen

$$\varphi = 90^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mu_2 = \int_{-b}^{+a} y^2\, y\, dx.$$

Werden diese für μ_1 und μ_2 gefundenen Ausdrücke in der allgemeinen Gleichung für μ berücksichtigt, so erhält man die eben so einfache als merkwürdige Relation

$$\mu = \mu_1 \cos^2 . \varphi + \mu_2 \sin^2 . \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (I.),$$

*) Man erinnere sich z. B. auf die Anwendung dieser Lehre für die Theorie des Widerstandes der Materialien.

welche — wie man sich leicht überzeugen kann — für jede beliebige Begränzung der halben Figur ihre Giltigkeit hat.

Diese aufgestellte Gleichung (I) läßt sich nun auf folgende Weise in Worte ausdrücken:

Wenn für eine symmetrisch gebildete materielle Ebene die Werthe der beiden Trägheits-Momente in Bezug auf die nach der vorigen Andeutung gewählten Coordinaten-Axen bekannt sind, so läßt sich hieraus auch das Trägheits-Moment in Bezug auf jede andere gegebene Drehungs-Axe, welche in die Ebene fällt und überdieß durch ihren Schwerpunkt geht, ohne Schwierigkeit bestimmen. So hat man z. B. für ein Rechteck von der Breite b und Höhe h, wenn letztere mit der Abscissen-Axe parallel genommen wird, $\mu_1 = \frac{1}{12} b^3 h$ und $\mu_2 = \frac{1}{12} b h^3$, daher allgemein $\mu = \frac{1}{12} b h [b^2 \cos^2 . \varphi + h^2 \sin^2 \varphi]$, wobei dem in der vorstehenden Untersuchung beobachteten Vorgange gemäß, die Masse der Figur durch den Flächenraum b h derselben repräsentirt erscheint.

Es ist übrigens keineswegs nothwendig, daß gerade die vorbezeichneten Trägheits-Momente μ_1 und μ_2 im Voraus bekannt seien. Wären nämlich anstatt dieser Werthe zwei andere μ_3 und μ_4 gegeben, welche den Winkeln $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \beta$ *) entsprächen, so würden sich im Allgemeinen die Gleichungen

$$\mu_3 = \mu_1 \cos^2 . \alpha + \mu_2 \sin^2 . \alpha \text{ und}$$
$$\mu_4 = \mu_1 \cos^2 . \beta + \mu_2 \sin^2 . \beta$$

zur Bestimmung der hierin unbekannten Größen μ_1 und μ_2 benützen lassen. Hieraus wird sonach ersichtlich, daß zur Erreichung des vorgesetzten Zweckes es genüge, bloß die Werthe der Trägheits-Momente in Bezug auf irgend zwei gegebene Drehungs-Axen zu kennen, welche — indem sie durch den Schwerpunkt der Figur gehen — in dieser letzteren eine beliebige Lage einnehmen können.

Aus der Gleichung (I) geht unmittelbar hervor, daß μ mit φ veränderlich sei, folglich das Moment der Trägheit je nach der Wahl der Drehungs-Axe bald größer bald kleiner ausfallen werde. Man wird jedoch bald erkennen, daß die verschiedenen Werthe von μ zwischen den Gränzen μ_1 und μ_2 eingeschlossen seien, oder höchstens diese letzteren erreichen können, und daß ferner der größere von beiden Gränzwerthen das Maximum, der kleinere aber das Minimum vorstelle, welches der Ausdruck für das Trägheits-Moment erreichen kann. Es versteht sich übrigens von selbst, daß diese Bemerkungen auch für solche Figuren gelten werden, welche in Bezug auf 2 Axen symmetrisch sind. **) Sind die beiden Werthe von μ_1 und μ_2 einander gleich, so kann den eben gegebenen Erläuterungen gemäß, von einer Veränderlichkeit des Trägheits-Momentes in Bezug auf solche Axen, welche in der Ebene liegen und hierbei durch den Schwerpunkt derselben gehen, keine Rede mehr sein, woraus ganz einfach folgte, daß dasselbe in der betrachteten Hinsicht einen constanten Werth besitzen müsse.

In der That geht für diesen speciellen Fall wegen $\mu_1 = \mu_2$ der Ausdruck (I) für jeden Werth des Winkels φ in

$$\mu = \mu_1 (\cos^2 . \varphi + \sin^2 . \varphi) = \mu_1 = \mu_2 \text{ über.}$$

Hieraus folgt also das höchst merkwürdige Resultat, daß — wenn die beiden Trägheits-Momente in Bezug auf die vorbezeichneten Coordinaten-Axen, oder eigentlich überhaupt in Bezug auf 2 verschiedene durch den Schwerpunkt der Ebene gehenden und in derselben befindlichen Drehungs-Axen *) gleich sind, — dasselbe auch in Bezug auf jede andere Drehungs-Axe, welche die beiden angeführten Bedingungen erfüllt, unverändert bleibe. Es ist nicht schwer einzusehen, daß die vorausgesetzte Gleichheit der Größen μ_1 und μ_2 bei allen Figuren eintreten werde, welche mindestens in Bezug auf drei Axen symmetrisch sind, wie dieß z. B. bei jedem regelmäßigen Polygone der Fall ist.

Wenn daher durch den Schwerpunkt einer solchen regelmäßigen Figur die Drehungs-Axe nach einer willkührlichen Richtung gezogen wird, so hat diese letztere, wenn sie nur in die Ebene selbst fällt, weiter keinen Einfluß auf die Größe des bezüglichen Trägheits-Momentes der angenommenen Figur.

Diese Darstellung wird genügen, um die Eingangs erwähnte Eigenschaft symmetrisch gebildeter Ebenen klar gemacht zu haben.

Ad II.

Der zweite Theil der gestellten Aufgabe besteht in der Erörterung des praktischen Werthes, welcher mit der Kenntniß der vorangeführten Eigenschaft verbunden ist. Zu diesem Behufe wird im Nachstehenden die Aufmerksamkeit der geehrten Leser auf die Lehre vom Widerstande der Materialien gelenkt. Es ist bekannt, daß — wenn der Widerstand eines Balkens oder Stabes gegen Biegung und Bruch bei gegebener Form, Unterstützung und Belastung ausgemittelt werden soll — man außer den physischen Eigenschaften des in Verwendung kommenden Materiales vorzüglich folgende 3 Punkte in Erwägung zu ziehen pflegt:

a) die sogenannte neutrale Schichte geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes des betrachteten Körpers,

b) der mit dem Namen Elasticitäts-Moment bezeichnete Ausdruck ist das Produkt aus dem Modul der Elasticität und dem Werthe für das Trägheits-Moment jenes Querschnittes in Bezug auf seine neutrale Axe, wobei man übrigens bei der mit dem Begriffe Trägheits-Moment verbundenen Vorstellung einer zu bewegenden Masse diese letztere mit der geometrischen Querschnittsfläche verwechselt anzunehmen hat, und

c) das Bruchmoment wird aus dem vorgenannten Elasticitäts-Momente dadurch bestimmt, daß man den Elasticitäts-Modul mit dem Maße der absoluten Festigkeit verwechselt, und diesen so erhaltenen Ausdruck als Zähler eines Bruches ansieht, der zum Nenner den Abstand der am stärksten gespannten Fasern von der neutralen Schichte hat **).

Werden nun diese aus den einschlägigen Untersuchungen hervorgehenden Resultate mit dem Inhalte der ersten Abtheilung des vorliegenden Aufsatzes in Verbindung gebracht, so wird man sofort die Ueberzeugung gewinnen, daß eine derartige Combinirung in solchen Fällen vortheilhaft sein könne, in welchen es sich um die Beurtheilung handelt, ob und wie fern die verschiedene Stellung eines gegebenen Querschnittes auf die Widerstandsfähigkeit eines mit demselben versehenen Balkens oder Stabes bei sonst unveränderten Umständen von Einfluß sein werde ***).

Viele der geehrten Leser werden schon öfter die Erfahrung gemacht haben, daß die Kenntniß einer Methode, welche die angeregte Frage

---

*) Die beiden Werthe der Winkel α und β dürfen sich jedoch nicht zu 180 Graden ergänzen.

**) Solche Figuren sind z. B. das Rechteck, die Ellipse rc.

*) Diese Drehungs-Axen dürfen jedoch nicht symmetrisch in Bezug auf die Abscissen-Axe liegen.

**) In letzterer Beziehung weichen manche Schriftsteller in so ferne ab, daß sie als den fraglichen Nenner den Abstand der neutralen Schichte von den am meisten in Anspruch genommenen Fasern, — gleichgiltig ob gegen Zerreißen oder Zerquetschen — annehmen.

***) Unter die unveränderten Umstände gehört auch die Lage der Ebene im Raume, in welcher der Querschnit sich befindet. Diese Bemerkung gilt auch für die Folge.

mit thunlichster Umgehung von mathematischen Entwicklungen auf eine einfache Weise zu lösen vermag, nur wünschenswerth erscheinen könne. Wie leicht kann es z. B. geschehen, daß bei irgend einer Holz- oder Eisenconstruction im Bau- und Maschinenwesen die Frage aufgestellt werde, ob ein gewisser Bestandtheil, der etwa ein gleichseitiges Dreieck oder ein Quadrat zum Querschnitte hätte, in dieser oder jener Stellung des Letzteren gegen das Durchbiegen mehr oder weniger gesichert sei, oder aber eine größere oder kleinere Tragfähigkeit besitze. Ja manchmal kann es schon von besonderem Interesse sein, zu erfahren, wie denn das Verhalten eines Balkens oder Stabes gegen Biegung und Bruch sein möge, wenn sein Querschnitt blos in eine umgekehrte Lage, d. i. so gebracht würde, daß tiefste und oberste Stelle desselben gegenseitig verwechselt werden, wie dieß etwa bei einem Dreiecke der Fall wäre, dessen Spitze einmal nach aufwärts, ein anderes Mal wieder nach abwärts gerichtet werden wollte, während die Grundlinie in beiden Lagen ihre horizontale Richtung unverändert beibehielte.

Um die Lösung derartiger Fragen anzubahnen, nehme man an, daß ein Balken oder Stab von irgend einer Gestalt und bei beliebiger Unterstützung und Belastung in Betracht stehe, für welchen bei einer gegebenen Stellung seines Querschnittes

1) der Werth des Trägheits-Momentes des letztern in Bezug auf seine neutrale Axe . . . . $= \mu$
2) die Größe der Durchbiegung . . . . $= \delta$
3) die Entfernung der am stärksten gespannten Faser von der neutralen Axe — oder was gleichbedeutend ist, die größte Höhe des Raumes, in welchem die Fasern nur ausgedehnt werden . $=$ h
endlich
4) die Tragfähigkeit desselben . . . . $=$ t

sei, während bei einer andern, ebenfalls gegebenen Stellung seines Querschnittes unter übrigens gleichen Umständen die analogen Größen mit den correspondirenden jedoch accentirten Buchstaben bezeichnet werden sollen. Unter diesen Voraussetzungen erhält man behufs der Vergleichung des Widerstandes, welchen der Körper in den beiden Stellungen entgegensetzen würde, folgende 2 Proportionen

$$\delta : \delta' = \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\mu'} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(A) und}$$

$$t : t' = \frac{1}{\delta h} : \frac{1}{\delta' h'} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(B).}$$

Diese lassen sich nun auf nachstehende Weise in Worte übersetzen: Es verhalten sich

(ad A.) die Biegungen eines und desselben Balkens oder Stabes bei verschiedenen Stellungen seines Querschnittes unter übrigens gleichen Umständen, wie umgekehrt die Werthe der bezüglichen Trägheits-Momente dieses Querschnittes in Bezug auf die jedesmal entstehende neutrale Axe,

(ad B.) die diesfälligen Tragfähigkeiten hingegen, wie umgekehrt die Produkte, von welchen jedes stets aus der betreffenden Biegung und aus der Entfernung der am meisten gespannten Fasern von der neutralen Schichte gebildet wird.

Wären daher zufällig in zwei verschiedenen Stellungen des Querschnitts die Trägheitsmomente desselben in Bezug auf die jedesmal entstehende neutrale Schichte einander gleich, so würden sodann auch die betreffenden Biegungen nicht weiter von einander verschieden sein, die dazu gehörigen Tragfähigkeiten aber nur im einfachen, jedoch verkehrten Verhältnisse zu den Entfernungen der neutralen Schichte von den am meisten gespannten Fasern stehen.

Um diese aufgestellten Regeln sogleich auf einen einfachen Fall, nämlich, wenn der Querschnitt des Balkens oder Stabes in eine genau entgegengesetzte Lage gebracht würde, anzuwenden, beachte man, daß sodann die neutrale Schichte und daher auch das Trägheits-Moment in Bezug auf dieselbe unverändert bleibe, demnach die Durchbiegungen des Körpers in beiden Stellungen gleich; — die Tragfähigkeiten hingegen nach dem Verhältnisse, in welchem die Entfernung der obersten von der untersten Faserschichte durch die neutrale Axe getheilt wird, zu beurtheilen sein werden. Hierbei hat man dem Balken oder Stabe in derjenigen Stellung die größere Festigkeit beizumessen, in welcher die gespanntesten Fasern der neutralen Schichte näher liegen.

Sei z. B. ein Balken mit dem dreieckigen Querschnitte A B C, Fig. 2, so in Anspruch genommen, daß die gespanntesten Fasern sich in der Grundlinie B C befänden, und sollte sodann der Querschnitt in die genau verkehrte Lage gebracht werden, wodurch offenbar die Fasern an der Spitze A die größte Ausdehnung zu erleiden hätten, so wäre die Festigkeit des Balkens im ersten Falle gerade doppelt so groß, wie im zweiten, weil die Entfernung der angespanntesten Fasern von der neutralen Schichte E F in der ursprünglichen Stellung nur die Hälfte von jener in der geänderten Lage des Querschnittes betragen würde. Bezeichnet nämlich O den Schwerpunkt des Dreieckes, so hat man bekanntlich zwischen O A und O D die Relation . . . $OD = \frac{1}{2} \cdot OA$.

Auf dieselbe Weise kann man finden, daß ein Balken oder Stab, dessen Querschnitt — wie in Fig. 3 — ein Halbkreis, oder — wie in Fig. 4 — die T form sein sollte, in der Lage, in welcher die Fasern an der Begränzungslinie A B [Fig. 3 und 4] die größte Spannung auszuhalten hätten, eine größere Festigkeit besitzen müsse, als in dem entgegengesetzten Falle, in welchem die bedeutendste Ausdehnung der Fasern in C vorherrschen würde.

Wie zuvor erwähnt wurde, ändert sich die Durchbiegung eines Körpers durchaus nicht, wenn mit Beibehaltung aller übrigen Umstände nur sein Querschnitt in die genau entgegengesetzte Lage gebracht wird. Man findet daher in dem vom Herrn Regierungsrathe Adam Burg herausgegebenen Supplement-Band zum Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre ganz richtig auf das bemerkenswerthe Resultat hingewiesen, daß der Widerstand eines dreikantigen Balkens gegen Biegung in den beiden Fällen, in welchen die Spitze des dreieckigen Querschnittes zuerst nach aufwärts, sodann aber nach abwärts gerichtet wird, vollkommen gleich bleibe. Indeß ist eine derartige specielle Nachweisung dieser Eigenschaft nicht nothwendig, weil dieselbe eigentlich ganz allgemein für jeden beliebig geformten Balken, dessen Querschnitt auf eine ähnliche Art in 2 entgegengesetzte Lagen gebracht wird, ihre Giltigkeit hat, übrigens aber auch deren Statthaftigkeit sogleich einleuchtend ist.

Um nun auf solche Stellungen des Querschnittes bei einem auf irgend eine Weise in Anspruch genommenen Balken überzugehen, welche nicht entgegengesetzt sind, betrachte man zunächst die Querschnittsfiguren, welche in Bezug auf Eine Axe symmetrisch erscheinen. In Berücksichtigung der in der ersten Abtheilung des vorliegenden Aufsatzes entwickelten Gleichung (I) wird man ohne Schwierigkeit erkennen, daß die Werthe der entstehenden Biegungen bei den verschiedenen Stellungen des Querschnittes stets zwischen gewissen Gränzen eingeschlossen seien; daß ferner die 2 Gränzwerthe durch das Maß der Biegungen für die beiden Fälle, wenn entweder die Richtung der Kraft mit der Axe der Figur zusammenfällt, oder aber auf derselben senkrecht steht, repräsentirt werden; und daß endlich der größere von den beiden Gränzwerthen das Maximum, der kleinere aber das Minimum des Maßes bezeichne, um welches der Balken unter der Voraussetzung, daß außer der Lage des Querschnittes die übrigen Einfluß nehmenden Umstände keine Veränderung erleiden, gebogen werden könne. Es bleibt jedoch im Allgemeinen unentschieden, in welchen von diesen beiden Fällen eigentlich das *Maximum*, und in welchem das *Minimum* der Biegung Statt finden werde, weil dieß lediglich von der Gestalt des Querschnittes abhängt, dieser letztere aber auf mannigfaltige Weise variiren kann. Diese Unbestimmtheit wird sich übrigens beinahe jedesmal schon durch einen einfachen Anblick der Figur des Querschnittes beseitigen lassen, ohne daß man es nöthig haben wird, die Werthe der bezüglichen Trägheits-Momente, welche streng genommen zur Lösung der angeregten Frage berufen wären, zu Rathe zu ziehen.

So wird z. B. ein Balken mit einem *halbkreisförmigen* Querschnitte, Fig. 3, sich am wenigsten durchbiegen, wenn die Kraft parallel mit der Richtung des Durchmessers A B wirkt, daher nothwendig die nach dem Halbmesser C D erfolgende Einwirkung dieser Kraft sofort das *Maximum* der Biegung veranlassen muß. Noch leichter wird die Beurtheilung über das Verhalten eines Körpers gegen Biegung werden, wenn sein Querschnitt in Bezug auf 2 Axen symmetrisch ist. So z. B. kann es keinem Zweifel unterliegen, daß bei einem Balken mit elliptischem Querschnitte die *größte* und *kleinste* Biegung beziehungsweise in der Richtung der kleinen und großen Axe erfolgen werde.

Um aber das genaue Verhältniß, welches zwischen der *größten* und *kleinsten* Biegung obwaltet, kennen zu lernen, muß man die Werthe der bezüglichen Trägheits-Momente nach Maßgabe der früher angegebenen Proportion lit. A. benützen. Bezeichnet man z. B. die Werthe der größten und kleinsten Biegung bei einem Balken mit rechteckigem Querschnitte, dessen Breite b und Höhe h sein soll, mit δ_1 und δ_2, und die dazu gehörigen Trägheits-Momente in dem vorbesprochenen Sinne mit μ_1 und μ_2, so erhält man wegen $\mu_1 = \frac{1}{12} b^3 h$ und $\mu_2 = \frac{1}{12} b h^3$, sofort die Proportion

$$\delta_1 : \delta_2 = \frac{1}{\mu_1} : \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{b^2} : \frac{1}{h^2} = h^2 : b^2,$$

so daß also die Quadrate der Rechtecks-Seiten als maßgebend angenommen werden müssen.

Außer den beiden Stellungen des Querschnittes eines Körpers, bei welchen das Maß der Biegung des letzteren den *größten* und *kleinsten* Werth erreicht, gibt es noch unzählige Lagen desselben, bei denen der Körper nach Maßgabe der obwaltenden Umstände mehr oder weniger Widerstand gegen die Biegung leisten werde. Von diesem letzteren kann man sich eine beiläufige Kenntniß schon vorhinein verschaffen, weil derselbe jedenfalls innerhalb der durch die oberwähnten Maximal- und Minimal-Werthe gezogenen Gränzen sich befinden muß. Zur genauen Ermittlung muß man übrigens die Gleichung (I) benützen, welche jedoch aus Anlaß der zwischen dem Momente der Trägheit und dem der Biegung herrschenden Verwandschaft vorläufig noch dahin zu modificiren ist, daß an die Stelle der durch die Buchstaben μ, μ_1 und μ_2 bezeichneten Trägheits-Momente die reciprocen Werthe der dazu gehörigen Biegungen δ, δ_1 und δ_2 gesetzt werden.

Dadurch entsteht offenbar die Gleichung

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\cos^2.\varphi}{\delta_1} = \frac{\sin^2.\varphi}{\delta_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II.)$$

In derselben sind δ_1 und δ_2 die größten und kleinsten Werthe der Biegungen, welche bekanntlich entstehen, wenn der Körper so in Anspruch genommen wird, daß sich im Querschnitte ein Mal die neutrale Schichte in seiner Axe A B, Fig. 1, das andere Mal aber in der hierauf Senkrechten C D befindet, während δ den Werth der Biegung für eine beliebige Lage der neutralen Schichte z. B. E F vorstellt, welche mit der Axe der Figur den Winkel φ einschließt. Die Gleichung (II.) lehrt, aus der bekannten größten und kleinsten Durchbiegung eines Balkens, dessen Querschnitt in Bezug auf *Eine* oder *zwei* Axen symmetrisch ist, für jede gegebene Stellung des letzteren unter sonst unveränderten Umständen die betreffende Durchbiegung des Balkens zu finden.

Hierbei ist bemerkenswerth, daß — wenn die Größen δ^1 und δ_2 gegeben sind, es durchaus nicht nothwendig erscheine, die eigentliche Gestalt des Querschnittes zu kennen.

Hätte z. B. ein Balken einen in Bezug auf *eine* Axe symmetrischen Querschnitt, und wäre bei einer gegebenen Unterstützung und Belastung seine *größte* Durchbiegung 3 Zoll und zwar in derjenigen Lage seines Querschnittes, in welcher die Axe desselben mit der neutralen Schichte zusammenfällt; hingegen die *kleinste* Durchbiegung, welche nunmehr in der um einen rechten Winkel gedrehten Lage des Querschnittes eintreten muß, nur 1 Zoll: so könnte die etwa aufgestellte Frage, um wie viel sich der Balken bei einer solchen Stellung des Querschnittes durchbiegen werde, in welcher die entstehende neutrale Schichte mit der Axe der Figur einen Winkel von 30 Graden einschließen würde, alle übrigen Umstände aber ungeändert bleiben sollen, ganz einfach durch die Auflösung der Gleichung

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\cos^2.30^\circ}{3''} + \frac{\sin^2.30^\circ}{1''}$$

beantwortet werden, weil sodann $d = 1''$ und $\varphi = 30^\circ$ gesetzt werden muß. Hieraus ergäbe sich eine Biegung von 2 Zollen.

Was die Tragfähigkeiten betrifft, welche ein Balken in den verschiedenen Stellungen seines Querschnittes besitzt, so kann zwar im Allgemeinen zur vorläufigen Wissenschaft dienen, daß mit der *kleineren* Biegung eine *größere* Festigkeit, und umgekehrt verbunden sein werde; jedoch muß behufs einer genauen Ausmittlung auf die Gleichung lit. B verwiesen werden, weil nur durch eine entsprechende Benützung derselben derlei Aufklärungen vollständig geliefert werden können.

Seien z. B. die Werthe der Tragfähigkeiten, welche mit den *größten* und *kleinsten* Biegungen δ_1 und δ_2 eines *vierkantigen* Balkens von der Breite b und Höhe h correspondiren, beziehungsweise t_1 und t_2, so erhält man bei dem Umstande, als die Entfernung der gespanntesten Fasern von der neutralen Schichte einmal $\frac{1}{2}$ b, das andere Mal $\frac{1}{2}$ h ist, die Proportion $t_1 : t_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} b \delta_1} : \frac{1}{\frac{1}{2} h \delta_2} = b : h$, wornach also die in Frage stehenden Tragfähigkeiten — wie dieß ohnehin bekannt ist — nur im einfachen Verhältnisse zu den Rechtecks-Seiten stehen.

Bemerkenswerth ist das Verhalten eines *dreikantigen* Balkens gegen Biegung und Bruch in den 3 Stellungen seines Querschnittes, — dessen Seiten a, b und c sein mögen, — in welchen die größte Ausdehnung oder Zusammendrückung der Fasern das erstemal in der Seite a, das zweitemal in der Seite b und das drittemal in der Seite c erfolgt. Zur näheren Versinnlichung kann man sich allenfalls vorstellen, daß der Balken behufs der Tragung einer Last an beiden Enden unterstützt, und der dreieckige Querschnitt zuerst auf die Seite a, sodann aber auf die Seite b und schließlich auf die Seite c gestellt werde.

Nennt man die Werthe der mit Rücksicht auf die Reihenfolge dieser gewählten Stellungen nach und nach entstehenden Biegungen δ_1, δ_2 und δ_3, die beziehungsweisen Tragfähigkeiten aber t_1, t_2 und t_3; so wird man in Hinblick auf die Eigenschaften der diesfälligen Trägheits-

Momente bei nur einiger Ueberlegung ohne alle Berechnung die Statthaftigkeit der beiden Proportionen

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = a^2 : b^2 : c^2 \text{ und } t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

einsehen, und hieraus entnehmen können, daß eine größere Biegung und kleinere Tragfähigkeit eintreten werde, wenn das Dreieck auf seine größere Seite gestellt wird, und umgekehrt eine kleinere Biegung und größere Festigkeit resultire, wenn man diese größere Seite mit einer von den beiden andern kleineren Dreiecks-Seiten verwechselt.

Dieses Resultat kann man auch mit Vortheil zu einer speciellen Entscheidung der vorhin nur im Allgemeinen angeregten Frage benützen, ob nämlich bei einem Balken, dessen Querschnitt ein gleichschenkliches Dreieck ist, die Biegung in dem Falle, wenn die Kraft in der Richtung der Höhe des Dreieckes einwirkt, ein Maximum oder Minimum im Vergleiche zu den bei allen andern in die Ebene des Querschnittes fallenden Richtungen der Kraft entstehenden Biegungen werde. Daß in einem solchen Falle entweder die größte oder kleinste Biegung eintreten müsse, ist bereits aus dem Vorhergehenden bekannt. Es erübrigt daher in Berücksichtigung der zuvor für jedes beliebige Dreieck aufgestellten allgemeinen Regeln nur noch, die Dimensionen der Dreiecks-Seiten in Betracht zu ziehen. Eine solche Betrachtung führt aber sogleich zur Erkenntniß, daß die fragliche Durchbiegung nur dann ein Maximum werde, wenn die Grundlinie die größte Seite des Dreieckes sein sollte, hingegen stets den Minimal-Werth erreiche, wenn die besagte Grundlinie die kleinste Dreiecks-Seite wäre. Wollte man zwischen der Größe der Grundlinie und der einzelnen Schenkel keine Verschiedenheit annehmen, so käme ein gleichseitiges Dreieck als Querschnitt zum Vorscheine, bei dessen Anwendung — wie dieß ohnehin in dem weiteren Verlaufe dieses Aufsatzes noch deutlicher werden wird — die Richtung der einwirkenden Kraft, oder was dasselbe ist, die Stellung des Dreieckes auf das Maß der Durchbiegung des Körpers offenbar keinen Einfluß mehr haben, und diese letztere für die verschiedenen Fälle in eine constante Größe übergehen würde.

Zur besseren Beleuchtung der über die Gleichung II. gegebenen Erläuterungen soll noch ein Beispiel angeführt und sofort angenommen werden, daß ein an beiden Enden aufruhender Stab etwa den Querschnitt, Fig. 5, besäße, und von einer durch den Schwerpunkt des letzteren gehenden Kraft P *) nach der angezeigten Richtung O P in Anspruch genommen werde. Um den Widerstand dieses Stabes gegen Biegung, so wie sein Tragvermögen aufzufinden, wird man mit Rücksicht auf das Gesagte auf folgende Weise vorgehen können:

Es sei O der Schwerpunkt des Querschnittes, A B eine Axe desselben und C D die auf der letzteren errichtete Senkrechte. Bezeichnet man die Werthe für die größte Biegung und die dazu gehörige Tragfähigkeit, welche offenbar bei der Einwirkung der Kraft P nach der Richtung C D Statt fände, mit δ_1 und t_1; hingegen die kleinste Biegung und entsprechende Tragfähigkeit, zu deren Realisirung die Kraft P nach der Richtungslinie A B einwirken müßte, mit δ_2 und t_2; endlich die Werthe der in Frage stehenden Biegung und Tragfähigkeit, mit δ und t: so erhält man zunächst die Gleichung

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\cos^2 . \alpha}{\delta_1} + \frac{\sin^2 . \alpha}{\delta_2},$$

wobei die auf die gegebene Richtung der Kraft construirte Senkrechte E F die Lage der diesfälligen neutralen Schichte, α aber den Winkel vorstellt, den diese letztere mit der Axe A B der Figur einschließt.

*) Die Kraft P kann auch als die Resultirende aus mehreren Kräften betrachtet werden.

Durch die aus dieser Gleichung vorzunehmende Bestimmung der Biegung δ wird sodann auch die Proportion

$$t : t_1 : t_2 = \frac{1}{\delta\, h} : \frac{1}{\delta_1\, h_1} : \frac{1}{\delta_2\, h_2}$$

vollkommen klar, und zur Beurtheilung der Festigkeit des Stabes anwendbar werden.

Hierbei wurde die Entfernung der gespanntesten Fasern von der neutralen Schichte bei dem Eintritte der größten und kleinsten Biegung beziehungsweise h_1 und h_2, bei dem in Untersuchung stehenden Falle aber h genannt. Diese Größen können in der Figur ganz wohl abgemessen werden, da leicht einzusehen ist, daß $h = GH \perp EF$, $h_1 = DO$ und $h_2 = OB$ sein werde. Es versteht sich übrigens von selbst, daß nicht nur die Verhältnisse, in denen die Biegungen δ, δ_1 und δ_2 zu einander stehen, sondern auch die absoluten Maße derselben berechnet werden können, obwohl diese letzteren, so lange es sich nur um eine Vergleichung von Widerständen handelt, niemals bekannt zu sein brauchen.

Um endlich auch das Verhalten solcher Körper, deren Querschnitte mindestens in Bezug auf 3 Axen symmetrisch sind, näher kennen zu lernen, erinnere man sich auf die aus der Gleichung (I) gezogenen Schlußfolgerungen und beachte, daß für die Biegungs-Momente dieselben Resultate gelten müssen, folglich die Lage der neutralen Schichte ohne Einfluß sein werde.

Es wird sonach ein Balken oder Stab mit einem derartigen Querschnitte in jeder Stellung des Letzteren stets die gleiche Durchbiegung zeigen, ohne übrigens deßhalb auch das gleiche Tragvermögen besitzen zu müssen.

Dieses letztere wird lediglich nach der Entfernung der angespanntesten Fasern von der neutralen Schichte, welche in den verschiedenen Stellungen vorhanden sein wird, zu bemessen sein. Je kleiner nämlich diese Entfernung ist, auf desto mehr Tragvermögen kann gerechnet werden, und eben so umgekehrt.

Zu den Figuren, welche mindestens in Bezug auf 3 Axen symmetrisch erscheinen, gehören aber nicht nur alle aus der Geometrie bekannten regelmäßigen Polygone, sondern auch eine Menge andere, welche — wie z. B. die Figuren 6, 7 und 8 — nach Belieben gebildet, und daher hinsichtlich ihrer Anzahl in keine Gränzen eingeschlossen werden können. Betrachtet man nun vorläufig nur die regelmäßigen Polygone, so wird man finden, daß die kleinste Distanz, in welcher sich möglicher Weise die gespanntesten Fasern von der neutralen Schichte befinden können, dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, die größte hingegen dem Halbmesser des umschriebenen Kreises gleich komme, woraus sofort ganz einfach folgt, daß die größten und kleinsten Festigkeiten, welche derlei mit solchen Querschnitten versehene Körper in den verschiedenen Stellungen der ersteren besitzen werden, sich umgekehrt, wie die erwähnten Halbmesser, verhalten müssen. Sei daher n die Seitenzahl des regelmäßigen Querschnittes, so wird das fragliche Verhältniß durch $1 : \cos. \left(\frac{180^0}{n}\right)$ ausgedrückt werden können.

Hiernach wird sich dieses Verhältniß

für ein gleichseitiges Dreieck	wie	1 : 0·500
für ein Quadrat	wie . . .	1 : 0·707
für ein regelmäßiges Fünfeck	wie . . .	1 : 0·809
für ein regelmäßiges Sechseck	wie . . .	1 : 0·866

2c. 2c. herausstellen, so daß also die verglichenen Festigkeiten desto weniger von einander verschieden sein werden, je größer die Anzahl der Polygons-Seiten ist, oder mit andern Worten, je mehr sich die Gestalt des Polygons der Kreisform nähert. So z. B. wird eine Wasserrad-Welle, welche ein regelmäßiges Sechseck zum Querschnitte hat, bei der rotirenden Bewegung des Rades stets dieselbe Biegung erleiden, ihr Tragvermögen aber wird periodisch zu- und abnehmen, und zwar fortwährend zwischen gewissen Gränzen, welche sich zu einander wie 1000 zu 866 verhalten, variiren, die übrigens zeitweilig auch erreicht werden. Man wird daher bei der Bestimmung der zur Sicherheit nöthigen Dimensionen einer solchen Welle die kleinere dieser beiden Gränzen zu berücksichtigen haben. Eben so ist leicht einzusehen, daß die bei Aufstellung von Straßengeländern in Verwendung kommenden Geländerbäume mit quadratischem Querschnitte ganz gleiche Durchbiegungen zeigen müssen, es möge derselbe auf eine seiner Seiten oder eine seiner Diagonalen gelegt werden, daher man sehr irren würde, wenn man durch die letztere Stellung im Vergleiche zur ersteren eine größere Steifigkeit zu erreichen glaubte. Noch mehr aber würde man sich täuschen, wenn man den Geländerbäumen bei verticaler Stellung einer Diagonale des quadratischen Querschnittes eine größere Festigkeit in Bezug auf vertikale oder horizontale Krafteinwirkungen zumuthen wollte, weil gerade in dieser Stellung des Querschnittes das geringste Tragvermögen der Geländerbäume vorhanden wäre, und in jeder andern Lage desselben eine größere relative Festigkeit erzielt werden könnte.

Die oben erwähnte Eigenschaft des quadratischen Querschnittes hinsichtlich des Widerstandes eines Balkens oder Stabes, welcher mit einem solchen versehen ist, hat zuerst Herr Navier zur Sprache gebracht. Dieselbe scheint jedoch noch wenig Berücksichtigung gefunden zu haben, weil sie auch in den besseren Werken über Mechanik nicht erwähnt wird. Uebrigens ist, wie die geehrten Leser entnommen haben werden, diese Eigenschaft keineswegs für den quadratischen Querschnitt ausschließlich giltig, sondern — wie dieß Referenten nachzuweisen gegönnt war — auch anderen unzähligen Querschnitts-Figuren gemein. Um von diesen Figuren wenigstens eine zu betrachten, nehme man an, daß ein Stab den Querschnitt, Fig. 6, hätte. Da dießfalls die Biegung wegen ihrer Unveränderlichkeit in Bezug auf die Lage dieses Querschnittes nicht mehr in Frage kommen kann, so wird bloß das Tragvermögen jenes Stabes zu erörtern sein. Zu diesem Ende ermittle man — was mit Rücksicht auf die obwaltenden Umstände gar keiner Schwierigkeit unterliegen kann — zunächst die Richtung der neutralen Axe, und ziehe zu dieser eine Parallele, welche die Figur des Querschnittes auf jener Seite, wo die Fasern nur ausgedehnt werden, entweder in einem oder mehreren Punkten berührt, ohne sie jedoch zu durchschneiden. Die so erhaltene Entfernung der beiden Parallelen gibt den Maßstab zur Beurtheilung der Tragfähigkeit des Stabes. Je größer nämlich diese Entfernung ausfällt, desto schwächer ist der Stab, und eben so umgekehrt. Wird dieses Verfahren bei verschiedenen Stellungen des Querschnittes zur Anwendung gebracht, so kann man sodann leicht eine Vergleichung der betreffenden Tragfähigkeiten ohne alle Berechnung anstellen. In der fraglichen Figur stellt z. B. AB die Richtung der neutralen Axe, CD die oben erwähnte Parallele und AC die maßgebende Entfernung vor.

Auf diese Weise glaubt Referent dasjenige, was er mitzutheilen die Absicht hatte, mit der nöthigen Deutlichkeit auseinandergesetzt zu haben, und erlaubt sich nur noch beizufügen, daß die gegebenen Regeln nicht nur auf prismatische, sondern auch auf bogenförmige Stäbe, so wie auch auf solche, bei welchen die Querschnitte an den verschiedenen Stellen des Stabes nicht congruent, sondern nur ähnlich sein sollten, ihre Benützung finden können. Jedoch muß man sich bei der Anwendung dieser wissenschaftlichen Betrachtungen auf einzelne praktische Fälle die bekannten Voraussetzungen, auf welche die bisher übliche allgemeine Theorie des Widerstandes der Körper gegen Biegung und Bruch basirt ist, fortwährend gegenwärtig halten, weil sonst leicht unbefriedigende Resultate zum Vorschein kommen könnten.

Schließlich wird noch darauf hingewiesen, daß bei Berücksichtigung derjenigen Theorie, bei welcher behufs der Beurtheilung der Tragfähigkeiten eines Körpers nicht die Entfernung der angespanntesten, sondern überhaupt der am meisten in Anspruch genommenen Fasern als maßgebend angenommen wird, nur einige der angeführten Resultate auf eine sehr einfache Art zu modificiren sein, die meisten hingegen unverändert bleiben werden.

Ueber die tangentiale Verbindung der Verschubschiene mit dem Korbbogen, und seine Zeichnung mit beliebigen Halbmessern.

Mit Zeichnungen Fig. 9—12 auf Blatt Nr. 5.

Als Beitrag zu den Aufsätzen in Nr. 11 anno 1850, und Nr. 2 anno 1851 der Zeitschrift des österr. Ingenieur-Vereins.

Die bezogenen Aufsätze setzen voraus, daß der Winkel fgc Fig. 9 (Bl. Nr. 5) den die Tangente gf an den Endpunkt f der von der Verschubschiene gebildeten Curve mit der, ihre ursprüngliche gerade Lage bezeichnenden Linie gc, sowie die Lage des Punktes g in der Linie Cc bekannt sei, und weisen darauf hin, daß man diese Daten dadurch bestimmen kann, daß an das gerade verbleibende Stück fh der Schiene von der Zugstange bis an ihr Ende, welches nothwendiger Weise eine Fortsetzung der Tangente bildet, eine gerade Latte angelegt, und auf derselben die Länge fg oder gh genau gemessen werde. Diese Länge gh vereint mit der bekannten Größe von ch liefern die Daten zur Berechnung des Winkels fgc und der Länge cg oder Cg.

Dieses Verfahren bedingt aber, daß die Verschubschiene bereits in die Bahn eingelegt sei. Es ist aber oft wünschenswerth, die Dimensionen einer Ausweiche vor ihrer wirklichen Ausführung genau zu kennen, um nach derselben anderweitige Anordnungen festzusetzen. Anderseits ist es bei dem schiefen Schnitt der Linie fg und Cc sehr schwierig den Durchschnittspunkt g mit hinreichender Schärfe zu bestimmen, selbst dann, wenn das Anlegen der Latte an das kurze gerade Stück fh vollkommen genau möglich ist. Ist aber in dem Stück fh eine Ungleichheit, die von einem festern Kern, dem Abspringen des vom Walzen verbliebenen Zunders oder sonst einer Ursache herrührt, daß die Latte an einem der beiden Punkte f oder h nur um den achten Theil einer Linie gegen die Schienenaxe unrichtig liegt, so beträgt der Fehler in dem Winkel fgh schon 9 Minuten, welcher Fehler vereint mit der wegen des schiefen Schnittes folgenden allenfälligen ungenauen Messung von gh, noch größer werden kann, als jener, welchen man begeht, wenn man die von der Verschubschiene gebildete Curve als einen Kreis betrachtet.

Kommt ferner die Ausweiche in einem Bogen herzustellen, so muß die Verschubschiene jedenfalls in die Krümmung des currenten Bahngeleises bleibend abgebogen werden, wenn nicht sonst der Fehler, den man durch die tangentiale Verbindung der Verschubschiene mit dem Ausweichgeleise vermeidet, mit derselben Größe in der kurrenten Bahn auftreten soll. In diesem Falle hat aber das Stück fh eine eigene Krümmung, und es würden sodann zur genauen Bestimmung des Durchschnittspunktes der beiden Tangenten an den Punkt f oder h des Curvenstückes fh, und an den Punkt C des Curvenstückes, wo die

Verschubschiene befestiget ist, sowie zur Messung von g h Operationen erfordert, die sich für gewöhnliche Fälle und mit den gewöhnlichen Instrumenten nicht ausführen lassen.

Diese Operationen sind aber auch nicht nothwendig. Die Gleichung der vor der Verschubschiene gebildeten Curve, ist zwar transcendent; da aber die bei den Ausweichen nöthige Abbiegung der Verschubschiene noch keinen merklichen Einfluß auf die verschiedene Länge des Curvenbogens und seiner zugehörigen Abscisse hervorbringt, so lassen sich die trigometrischen Funktionen des Winkels, den die Tangente eines Punktes der Curve mit der durch den Anfangspunkt derselben tangential genommenen Abscisse, bildet, auf Nährungswerthe bringen, die für alle vorkommende Fälle ein zureichend genaues Resultat liefern.

Der theilweise Zweck dieses Aufsatzes ist nun, diese Näherungswerthe aufzustellen, und deren zureichende Genauigkeit zu zeigen.

Man ist berechtigt, die gewalzte schmiedeiserne Verschubschiene als einen elastischen Stab zu betrachten, der an einem Ende unverrückbar festgespannt, und am andern Ende durch eine Kraft gebogen ist.

Bezeichnet daher:

r den Krümmungshalbmesser der, von dem Stabe im natürlichen Zustande gebildeten Curve,

ρ den Krümmungshalbmesser der, von dem Stabe im gebogenen Zustande gebildeten Curve

β das Elasticitätsmoment des Stabes $= e\int_{-h}^{+h} v\,u^2\,\partial u$

Q die an seinem freien Endpunkte, in der Ebene der ursprünglichen Krümmung des Stabes, wirkende Kraft

l die Abscisse und

a die Ordinate dieses Endpunktes, wo die Kraft angreift, in Bezug auf das Axensystem A X, A Y, Fig. 10, das in dem Punkte A tangirt,

so ist die bekannte Momentengleichung des Stabes:

$$\pm Q\,(l-x) = \beta\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) \ldots.(1.$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn die Kraft Q den Stab nach dem Mittelpunkt seiner ursprünglichen Krümmung zu, also nach E D, und das untere, wenn sie ihn in entgegengesetzter Richtung, also nach E F zu biegen strebt.

Ist x die unabhängige Veränderliche der Function, also ∂x constant, so ist $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial x\,\partial^2 y}{\partial s^3}$ oder da $\partial s = \sqrt{\partial x^3 + \partial y^2}$ ist,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} : \left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

hierdurch wird die Gleichung (1)

$$\beta\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left[\pm Q\,(l-x) + \frac{\beta}{r}\right]\left[1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

Setzt man nun $\beta = c^2 Q$ und sodann $b = l \pm \frac{c^2}{r}$, so geht vorstehender Ausdruck über in

$$c^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} : \left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \pm\,(b-x)$$

und das erste Integral hiervon ist

$$\partial y = \pm\,\frac{(2\,b\,x - x^2)\,\partial x}{\sqrt{4\,c^4 - (2\,b\,x - x^2)^2}} \ldots\ldots(2$$

und da $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ ist

$$\partial s = \frac{2\,c^2\,\partial x}{\sqrt{4\,c^4 - (2\,b\,x - x^2)^2}} \ldots.(3$$

Nun ist aber der Sinus eines Winkels, den die Tangente an einem Punkt der Curve mit der Abscissenaxe macht, oder $\sin\alpha = \frac{\partial y}{\partial s}$, also aus (2) und (3)

$$\sin\alpha = \pm\,\frac{2\,b\,x - x^2}{2\,c^2} \ldots..(4$$

In der Ausdehnung der bei Ausweichen vorkommenden Fällen, hat aber die Größe c^2 stets einen so großen Werth, daß man die Größe $(2\,b\,x - x^2)$ gegen $4\,c^4$ ohne Fehler vernachlässigen kann, hierdurch wird die Gleichung (2 und 3)

$$\partial y = \pm\,\frac{(2\,b\,x - x^2)\,\partial x}{2\,c^2}$$

$$\partial s = \partial x$$

und wenn man integrirt

$$y = \pm\,\frac{3\,b\,x^2 - x^3}{6\,c^2} \ldots.(5$$

$$s = x \quad \ldots\ldots\ldots(6$$

wo keine Constante hinzu kommt, weil sowohl y als s für $x = o$, Null sein müssen.

Aus (5) folgt $6\,c^2 y = \pm\,(3\,b\,x^2 - x^3)$ und wenn man hierin für b seinen Werth $l \pm \frac{c^2}{r}$ setzt und c^2 bestimmt, so erhält man

$$c^2 = \pm\,\frac{(3\,l^2 x - x^3)\,r}{6\,r\,y - 3\,x^2}$$

Substituirt man diesen Werth von c^2 in die Gleichung (4), so erhält man, wenn man dort ebenfalls für b seinen Werth $l \pm \frac{c^2}{r}$ setzt

$$\sin\alpha = \pm\,\frac{2\,b\,x - x^2}{2\,c^2} = \pm\,\frac{2\,l\,x - x^2}{2\,c^2} + \frac{x}{r} =$$

$$= \pm\,\frac{(2\,l\,x - x^2)\,(6\,r\,y - 3\,x^2)}{2\,r\,(3\,l\,x^2 - x^3)} + \frac{x}{r}$$

und da eigentlich der Winkel blos für den Endpunkt der Curve nothwendig ist, für welchen Punkt $x = l$ und $y = a$ ist

$$\sin\alpha = \pm\,\frac{6\,r\,a\,l^2 - 3\,l^3}{4\,r\,l^2} + \frac{r}{l} = \pm\,\frac{6\,r\,a\,l^2 \pm l^3}{4\,r\,l} =$$

$$= \pm\,\frac{3\,a}{2\,l} + \frac{l}{4\,r} \ldots..(7$$

wobei bemerkt werden muß, daß bei der Anwendung für l die bekannte Länge der Verschubschiene vom Befestigungspunkt bis zur Zugstange zu nehmen ist.

Liegt die Ausweiche in einer geraden Bahn, so daß also die Verschubschiene ursprünglich gerade ist, so ist r unendlich groß, also $\frac{l}{4\,r} = o$ und

$$\sin\alpha = \pm\,\frac{3\,a}{2\,l} \ldots..(8)$$

Die Gleichung dieser Tangentenlinie ist aber

$$y \mp a = \mathrm{tg.}\,\alpha\,(x - l)$$

und da für deren Durchschnittspunkt mit der Abscissenachse $y = o$ ist,

$$x = l \pm \frac{a}{\mathrm{tg.}\,\alpha} \ldots.(9$$

ein ebenfalls sehr einfacher Ausdruck für die Entfernung des Durchschnittspunktes g vom Anfangs- oder Befestigungspunkt C (Fig. 9.)

In diesen Gleichungen gilt das obere Zeichen + so lange die Ordinate a auf der Seite der positiven Ordinaten oder oberhalb A X ist, und das untere Zeichen, wenn sie unterhalb A X (Fig. 10) liegt.

Die Gleichung (7) zeigt auch, daß der Sinus des Winkels α der Tangente an den Endpunkt h (F. 11) der Schienencurve mit der Abscissenaxe auch dann noch positiv sein kann, d. h. diese Tangente h′ i′ noch immer eine solche Lage gegen die Abscissenachse A X haben kann, als sie hatte, so lange der Endpunkt h noch auf der Seite der positiven Ordinate lag, so lange $\frac{3\,a}{2\,l} < \frac{l}{4\,r}$ ist, und erst wenn $\frac{3\,a}{2\,l} = \frac{l}{4\,r}$ ist, zur Abscissenaxe parallel wird, und endlich erst, wenn $\frac{3\,a}{2\,l} > \frac{l}{4\,r}$ wird, die Lage h″ i″ annimmt, jedoch stets, die Biegung der Schiene mag noch so groß sein, auf der in der Fig. 11 verzeichneten Seite liegt. Dieses zeigt, daß die Curve einen Inflexionspunkt hat, und durch die entsprechende Analyse der Curven-Gleichung findet man auch, daß die in diesem Fall von der gebogenen Verschubschiene gebildeten Curve für $x = l - \frac{\beta}{r\,Q} = b$ einen Inflexionspunkt hat. Die Form der Schiene, wird also von ihrem Befestigungspunkt bis zu dem Punkt, dessen Abscisse $x = l - \frac{\beta}{r\,Q} = b$ ist, gegen die Abscissenaxe convex, und von diesem Punkt bis zum Ende der Curve gegen diese Axe concav sein. Ein Umstand, der bei Ausführung von Ausweichen in diesem Fall wohl zu berücksichtigen ist.

Die genaue Nachweisung der genügenden Schärfe der unter (7, 8 u. 9) aufgestellten Näherungswerthe auf analytischem Wege, würde zu weit führen. und muß, so wie die weitere Durchführung dieses Gegenstandes einer beabsichtigten Abhandlung über die Construction des Oberbaues nach den Erfordernissen für den Betrieb vorbehalten bleiben, und es dürfte hier genügen die Anwendbarkeit dieser Ausdrücke durch ein solches Beispiel nachzuweisen, welches für die Ausweichen wohl als Gränze angenommen werden kann, indem für dasselbe der Unterschied zwischen dem Resultat der vollständigen genauen Berechnung, und jener durch die Näherungsformel $\sin\alpha = \pm \frac{3\,a}{2\,l} + \frac{l}{4\,r}$ nachgewiesen wird.

Um aber dieses zu können, müssen erst die Ausdrücke (2) und (3) integrirt werden.

Diese Integration ist zwar nicht in einem geschlossenen Ausdruck möglich, doch integrirt man mittelst der Auflösung in eine Reihe, so erhält man für y und s Ausdrücke, welche weit über die Größe der Biegung, wie sie bei Ausweichen vorkömmt, sehr schnell convergiren.

Um diese Integration zu bewerkstelligen, schreibe man die Ausdrücke (2 und 3)

$$\partial y = \pm \frac{\left(\frac{2\,b\,x - x^2}{2\,c^2}\right)\partial x}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\,b\,x - x^2}{2\,c^2}\right)^2}}$$

$$\partial s = \frac{\partial x}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\,b\,x - x^2}{2\,c^2}\right)^2}}$$

und löst man jetzt $1 : \sqrt{1 - \left(\frac{2\,b\,x - x^2}{2\,c^2}\right)^2} = \left[1 - \left(\frac{2\,b\,x - x^2}{2\,c^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ in eine Reihe auf, so erhält man

$$\left[1 - \left(\frac{2\,b\,x - x^2}{2\,c^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{8\,c^4}(4\,b^2x^2 - 4\,b\,x^3 + x^4) + \\ + \frac{3}{128\,c^8}(16\,b^4x^4 - 32\,b^3x^5 + 24\,b^2x^6 - 8\,b\,x^7 + x^8) + \\ + \frac{5}{1024\,c^{12}}(64\,b^6x^6 - 192\,b^5x^7 + 240\,b^4x^8 - 160\,b^3x^9 + \\ + 60\,b^2x^{10} - 12\,b\,x^{11} + x^{12}) + \ldots \text{ etc.}$$

Multiplicirt man nun diese Reihe einmal mit $\left(\frac{2\,b\,x - x^2}{2\,c^2}\right)\partial x$ das andere mal mit ∂x und integrirt sodann die einzelnen Glieder der so erhaltenen Produkte, so erhält man

$$y = \pm \int \frac{(2\,b\,x - x^2)\,\partial x}{\sqrt{4\,c^4 - (2\,b\,x - x^2)^2}} = \pm \left[\frac{3\,b\,x^2 - x^3}{6\,c^2} + \right. \\ + \frac{1}{16\,c^6}\left(2\,b^3x^4 - \frac{12}{5}\,b^2x^5 + b\,x^6 - \frac{1}{7} + x^7\right) + \\ + \frac{3}{256\,c^{10}}\left(\frac{16}{3}b^5x^6 - \frac{80}{7}b^4x^7 + 10\,b^3x^8 - \frac{40}{9}b^2x^9 + \right. \\ \left.\left. + b\,x^{10} - \frac{1}{11}\,x^{11}\right) \ldots\ldots \right]$$

$$s = \int \frac{2\,c^2\,\partial x}{\sqrt{4\,c^4 - (2\,b\,x - x^2)^2}} = x + \frac{1}{8\,c^4}\left(\frac{4}{3}\,b^2x^3 - b\,x^4 + \frac{1}{5}x^5\right) + \\ + \frac{3}{128\,c^8}\left(\frac{16}{5}b^4x^5 - \frac{16}{3}b^3x^6 + \frac{24}{7}b^2x^8 - b\,x^8 + \frac{1}{9}\,x^9\right) + \\ + \frac{5}{1024\,c^{12}}\left(\frac{64}{7}b^6x^7 - 24\,b^5x^8 + \frac{80}{3}b^4x^9 - 16\,b^3x^{10} + \right. \\ \left. + \frac{60}{11}b^2x^{11} - b\,x^{12} + \frac{1}{13}\,x^{13}\right) + \ldots\ldots$$

und da hier eigentlich die Ordinate und Bogenlänge für den Endpunkt nothwendig wird, für welchen $x = l$ ist, so erhält man durch diese Substitution

$$a = \pm \left[\frac{3\,b\,l^2 - l^3}{6\,c^2} + \frac{1}{16\,c^6}\left(2\,b^3\,l^4 - \frac{12}{5}b^2\,l^5 + \right.\right. \\ \left.\left. + b\,l^6 - \frac{1}{7}\,l^7\right) + \ldots\ldots\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10$$

$$s = l + \frac{1}{8\,c^4}\left(\frac{4}{3}b^2l^3 - b\,l^4 + \frac{1}{5}l^5\right) + \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11$$

aus welchen Ausdrücken sich a und s mit aller Schärfe berechnen lassen.

Es sei nun zur Nachweisung des Fehlers durch die Anwendung der Ausdrücke in (7 und 9) eine Ausweiche in einem Bogengeleise von 50 Klftr. Radius zu construiren, die Länge der Abscisse l des beweglichen Theiles der Verschubschiene von dem Befestigungspunkt bis zur Zugstange betrage 15′ oder 180 Zoll, die Kraft, welche die Schiene biegt, sei 200 Pfd., das Moment der Schiene nach Nr. 23, 1849, Fig. 9 der Zeitschrift des öster. Ing. Vereins $m = 2{\cdot}5826$, der Elasticitätsmodul des Schmiedeisens $e = 25000000$, also $c^2 = \frac{\beta}{Q} = \frac{2{\cdot}5826\,.\,25000000}{200} = 322825$, und wenn die Biegung gegen den Mittelpunkt zu statt findet, also das obere Zeichen gilt $b = l + \frac{c^2}{r} = 269{\cdot}673$; mit diesen Werthen findet man aus (10, 11 und 4)

$a = 10{\cdot}552$; $s = 180{\cdot}414$ und $\alpha = 5^0\,44'\,58''$.

Nach dem Ausdruck $\sin\alpha = \pm \frac{3\,a}{2\,l} + \frac{l}{4\,r}$ ergibt sich, da bei der Ausführung nur die Bogenlänge $s = 180{\cdot}414$ und die Ordinate $a = 10{\cdot}552$ die bekannten Größen sind, $\alpha = 5^0\,44'\,24''$ also gegen das wahre Resultat selbst bei dieser wohl als Gränze anzunehmenden Ausweiche nur um $0^0\,0'\,34''$ zu klein, eine Differenz, die bei einem Radius für den Ausweichbogen von 100 Klftr. eine unrichtige Lage des Mittelpunktes desselben von erst 0·0164 Klftr. oder 1·2 Zoll gibt. Noch kleiner wird aber diese Differenz, wenn die Ausweiche in Bahncurven von größeren Halbmessern, oder in geraden Linien zu errichten kommt.

In der Entfernung des Durchschnittspunktes beträgt der Fehler für obiges Beispiel 0·43 Zoll.

Zu zeigen, wie man durch Construction jede wie immer geartete Ausweiche vollkommen genau zu zeichnen im Stande ist, ohne vorher eine andere Rechnung, als für den Winkel f g c und den Durchschnittspunkt g (Fig. 9) zu bedürfen, ist eine weitere Aufgabe dieses Aufsatzes, mit deren Lösung er unter Bezugnahme auf die Zeichnung, Fig. 12, in der nächsten Nummer geschlossen werden soll.

(Schluß folgt.)

Verantwortlicher Redacteur: **Georg Winiwarter.** — In Commission der **L. W. Seidel**'schen Buchhandlung, innere Stadt Nr. 1122.

Druck von Carl Gerold und Sohn.

Fig. 4.

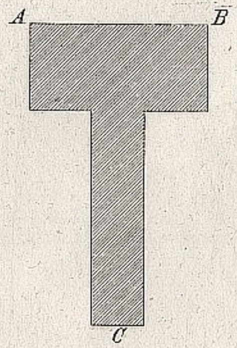

Fig. 2.

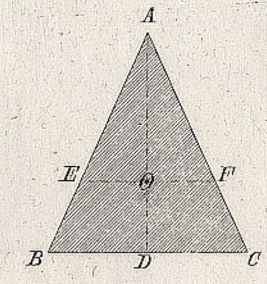

Fig. 1.

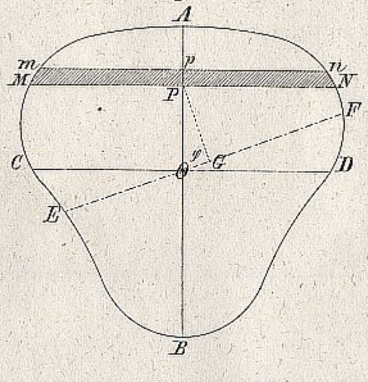

Fig. 3.

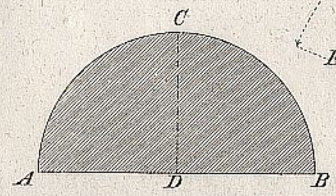

Fig. 5.

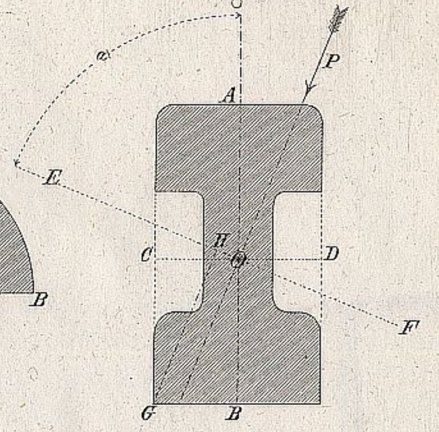

Fig. 7.

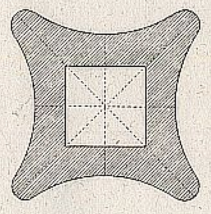

Fig. 6.

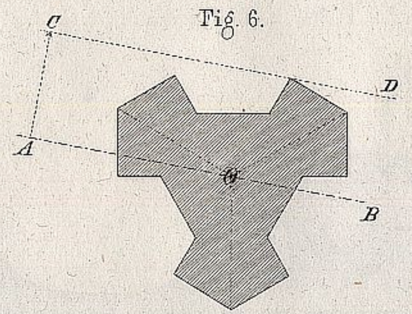

Fig. 8.

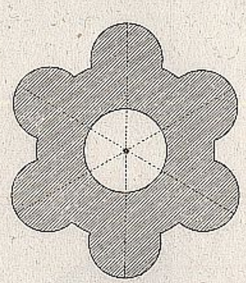

Fig. 9.

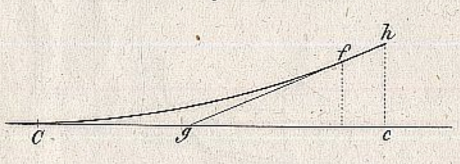

Fig. 10.

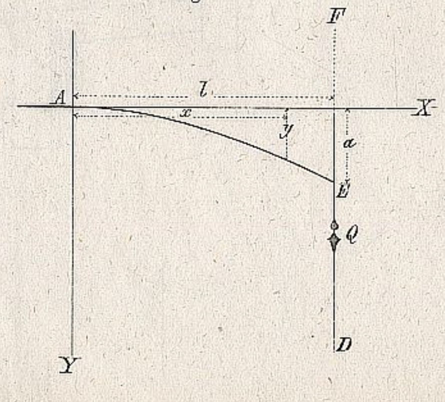

Fig. 12.

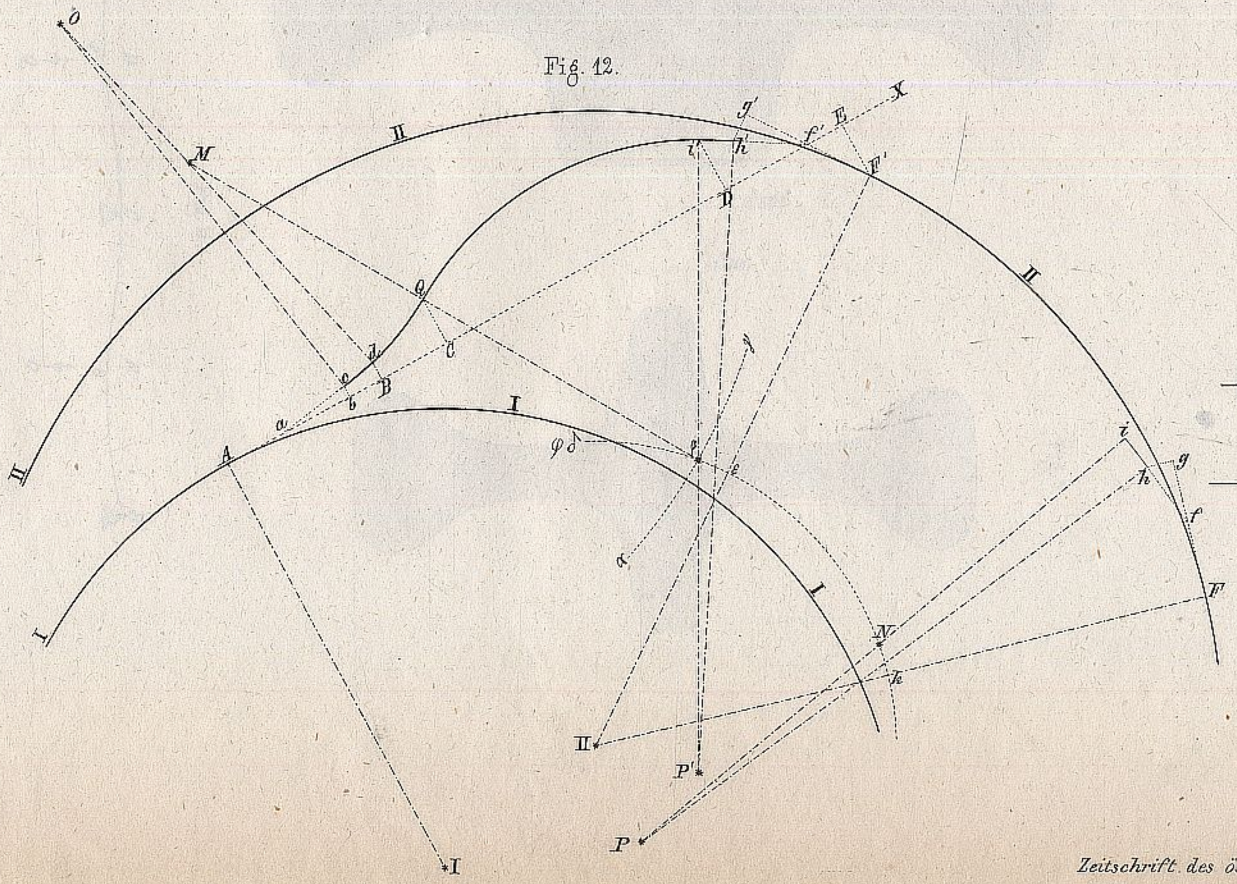

Fig. 11.